Funktion (Mathematik)

In der Mathematik ist eine **Funktion** (lat. *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x -Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable, y -Wert) zuordnet. Der Funktionsbegriff wird in der Literatur unterschiedlich definiert, jedoch geht man generell von der Vorstellung aus, dass Funktionen mathematischen Objekten mathematische Objekte zuordnen, zum Beispiel jeder reellen Zahl deren Quadrat. Das Konzept der Funktion oder Abbildung nimmt in der modernen Mathematik eine zentrale Stellung ein; es enthält als Spezialfälle unter anderem parametrische Kurven, Skalar- und Vektorfelder, Transformationen, Operationen, Operatoren und vieles mehr.

1 Begriffsgeschichte

Erste Ansätze zu einer impliziten Verwendung des Funktionsbegriffs in Tabellenform (Schattenlänge abhängig von der Tageszeit, Sehnenlängen abhängig vom Zentriwinkel etc) sind bereits in der Antike zu erkennen. Den ersten Beleg einer expliziten Definition des Funktionsbegriffs findet man bei Nikolaus von Oresme, der im 14. Jahrhundert Abhängigkeiten sich ändernder Größen (Wärme, Bewegung etc) graphisch durch senkrecht aufeinander stehende Strecken (longitudo, latitudo) darstellte.[1] Am Beginn des Prozesses zur Entwicklung des Funktionsbegriffs stehen Descartes und Fermat, die mit Hilfe der von Viète eingeführten Variablen die analytische Methode der Einführung von Funktionen entwickelten.[2] Funktionale Abhängigkeiten sollten durch Gleichungen wie zum Beispiel $y = x^2$ dargestellt werden. In der Schulmathematik wurde dieser naive Funktionsbegriff bis weit in die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts beibehalten. Die erste Umschreibung des Funktionsbegriffs nach dieser Idee stammt von Gregory in seinem 1667 erschienenen Buch *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Der Begriff *Funktion* kommt wohl erstmals 1673 in einem Manuskript von Leibniz auf, der in seiner Abhandlung von 1692 *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis* auch die Begriffe „Konstante“, „Variable“, „Ordinate“ und „Abszisse“ benutzt. Im Schriftwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli wird der Funktionsbegriff von der Geometrie losgelöst und in die Algebra übertragen. In Beiträgen von 1706, 1708 und 1718 stellt Bernoulli diese Entwicklung dar. 1748 präzisiert Euler, ein Schüler Johann Bernoullis, in seinem Buch *Introductio in analysin infinitorum* den Funktionsbegriff weiter.[3]

Bei Euler findet man zwei verschiedene Erklärungen des Funktionsbegriffs: Zum einen stellt jeder „analytische Ausdruck“ in x eine Funktion dar, zum anderen wird $y(x)$ im Koordinatensystem durch eine freihändig gezeichnete Kurve definiert.[4] 1755 formuliert er diese Vorstellungen ohne Verwendung des Terminus „analytischer Ausdruck“ um. Außerdem führte er bereits 1734 die Schreibweise $f(x)$ ein. Er unterscheidet zwischen eindeutigen und mehrdeutigen Funktionen. Bei Euler ist damit auch die Umkehrung der Normalparabel, bei der jeder nicht-negativen reellen Zahl sowohl ihre positive als auch ihre negative Wurzel zugeordnet wird, als Funktion zugelassen. Für Lagrange sind nur Funktionen zulässig, die durch Potenzreihen definiert sind, wie er 1797 in seiner *Théorie des fonctions analytiques* festlegt. Eine fruchtbare Auseinandersetzung über das Bewegungsgesetz einer schwingenden Saite, zu dem d’Alembert 1747, Euler 1748 und Daniel Bernoulli 1753 unterschiedliche Lösungen vorstellten, führte zur Entdeckung der *Definitionsmenge* und einem weiter präzisierten Funktionsbegriff, in dem schon so etwas wie eindeutige Zuordnung umschrieben wird, durch Fourier in seinem 1822 erschienenen Buch *Théorie analytique de la chaleur*. Ähnliches formuliert Cauchy 1823 in *Résumé des leçons … sur le calcul infinitésimal*.

Als die Analysis im 19. Jahrhundert mit einem exakten Grenzwertbegriff auf eine neue Grundlage gestellt wurde, wurden Eigenschaften, die bisher als für Funktionen konstituierend aufgefasst wurden, in einem Exaktifizierungsprozess als selbständige Begriffe eingeführt und vom Funktionsbegriffs losgelöst. Dirichlet, ein Schüler Fouriers, formulierte diese neue Sicht: „Ideen an die Stelle von Rechnungen“ und stellte 1837 seine Ideen dar. Stokes führte in Arbeiten 1848 und 1849 ähnliche Ansichten aus. So verfuhr Riemann, Schüler von Dirichlet, 1851 in *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe* mit der Stetigkeit, später folgten Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit. Eine Zusammenfassung dieser Entwicklung macht Hankel 1870 in *Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen*. Auch hier wird noch nicht zwischen der Funktion f und dem Funktionswert $f(x)$ an der Stelle x unterschieden.[5]

Weierstraß, Dedekind und andere entdeckten, dass Grenzwerte unendlicher Folgen „klassischer“ Funktionen sprunghaft sein können und sich nicht immer durch „geschlossene“ Formeln, d. h. mit endlich vielen Rechenoperationen, ausdrücken lassen. Das erzwang eine schrittweise Ausweitung des Funktionsbegriffs.

Davon unabhängig wurde im 19. Jahrhundert die Gruppentheorie begründet, mit der man systematisch untersuchen kann, wie sich algebraische Gleichungen unter der Wirkung aufeinanderfolgender Transformationen verändern. Bei der Anwendung dieser Theorie auf geometrische Probleme wurden gleichbedeutend mit *Transformation* auch die Begriffe *Bewegung* und *Abbildung* gebraucht.

Als Anfang des 20. Jahrhunderts die Grundlagen der Mathematik einheitlich in der Sprache der Mengenlehre formuliert wurden, stellten sich die mathematischen Begriffe *Funktion* und *Abbildung* als deckungsgleich heraus. Im Sprachgebrauch wirken die unterschiedlichen Traditionen jedoch fort. In der Analysis spricht man heute häufig noch von Funktionen, während man in der Algebra und in der Geometrie von Abbildungen spricht. Einige Mathematiker unterscheiden auch heute noch streng zwischen einer Abbildung und einer Funktion. Diese verstehen unter einer Funktion eine Abbildung in den reellen oder komplexen Zahlenkörper.

Weitere Synonyme für *Funktion* in spezielleren Zusammenhängen sind unter anderem Operator in der Analysis, Operation, Verknüpfung und Morphismus in der Algebra.

Heute sehen manche Autoren den Funktionsbegriff nicht unbedingt als auf Mengen beschränkt an, sondern lassen jede aus geordneten Paaren bestehende Klasse, die keine verschiedenen Elemente mit gleicher linker Komponente enthält, als Funktion gelten.[6] Mengentheoretisch ausgedrückt werden Funktionen also als *rechtseindeutige Relationen* definiert.

2 Definition

2.1 Grundidee

Eine Funktion f ordnet *jedem* Element x einer Definitionsmenge D *genau ein* Element y einer Zielmenge Z zu.

Schreibweise:

$$f\colon\ D \to Z,\ x \mapsto y.$$

Für das dem Element $x \in D$ zugeordnete Element der Zielmenge schreibt man im Allgemeinen $f(x)$.

Anmerkungen:

- Die Umkehrung gilt nicht: Ein Element der Zielmenge kann einem, mehreren, aber auch keinem Element der Definitionsmenge zugeordnet sein.
- Oft ist an Stelle der Definitionsmenge zunächst eine Quellmenge Q gegeben. Wenn f als Rechenvorschrift gegeben ist, erhält man die Definitionsmenge D_f , indem man von Q diejenigen Elemente ausschließt, für die f nicht definiert ist.

2.2 Mengentheoretische Definition

Mengentheoretisch ist eine Funktion eine spezielle Relation:

> Eine Funktion von der Menge D in die Menge Z ist eine Menge f , die die folgenden Eigenschaften hat:[7]
>
> - f ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $D \times Z$ von D und Z , d. h. f ist eine Relation zwischen D und Z .
> - Für jedes Element x aus D existiert (mindestens) ein Element y in Z , so dass das geordnete Paar (x, y) Element der Relation f ist. f ist also *linkstotal*.
> - Zu jedem Element x von D gibt es höchstens ein Element y von Z , so dass das Paar (x, y) in f liegt. f ist damit *rechtseindeutig* oder *funktional*.

Die letzten beiden Eigenschaften lassen sich auch wie folgt zusammenfassen:

> - Zu jedem Element x von D gibt es genau ein Element y von Z , so dass das Paar (x, y) Element der Relation f ist.

Oft möchte man aber auch die Zielmenge explizit zu einem Teil der Funktion machen, zum Beispiel um Aussagen zur Surjektivität anstellen zu können:

> Ein Paar $f = (G_f, Z)$, bestehend aus einer Relation G_f und einer Menge Z , heißt **Funktion** von der Menge D nach Z , wenn gilt: $G_f \subseteq D \times Z$ und zu jedem Element x von D gibt es genau ein Element y von Z (geschrieben $f(x) = y$), so dass das Paar (x, y) Element von G_f ist.

G_f wird auch der **Graph** der Funktion f genannt. Die Definitionsmenge D der Funktion ist dabei durch ihren Graphen eindeutig bestimmt und besteht aus den ersten Komponenten aller Elemente des Graphen. Stimmen zwei Funktionen in ihren Graphen überein, so sagt man auch, sie seien im Wesentlichen gleich.

Man kann jedoch auch noch die Definitionsmenge hinzunehmen und eine Funktion entsprechend als ein Tripel $f = (G_f, D, Z)$, G_f wie oben, definieren.

3 Notation

3.1 Schreibweisen

Eine Zuordnung kann unter anderem in einer der folgenden Formen beschrieben werden:

Funktionsgleichung mit Definitionsmenge $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{N}$

Eindeutige Zuordnungsvorschrift mit Definitionsmenge $x \mapsto x^2, \quad x \in \mathbb{N}$

Eindeutige Zuordnungsvorschrift mit Definitions- und Zielmenge $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2$

Wertetabelle (für endliche, aber auch abzählbar unendliche Definitionsmengen)

Als Relation insbesondere auch als aufgezählt oder beschrieben dargestellte Teilmenge $f = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),\ldots\}$

Als Ergebnis von Verknüpfungen und Operationen (zum Beispiel Komposition, Differenzierung, Bildung der Umkehrfunktion, …), die auf andere Funktionen angewendet werden $f = (g' \circ h)^{-1}$

3.2 Sprechweisen

Für die Zuordnung eines Funktionswertes y zu einem Argument x gibt es eine Reihe verschiedener Sprech- oder ausführlicher Schreibweisen, die alle mehr oder weniger gleichwertig sind und vor allem in Abhängigkeit von dem, was vordergründig ausgedrückt werden soll, vom jeweiligen Kontext, der benutzten Symbolik und auch vom Geschmack des Sprechers (Schreibers) gewählt werden. Hier einige Beispiele:

x wird abgebildet auf f von x

f von x wird x eindeutig zugeordnet (vornehmlich, wenn das $\mapsto$ -Symbol in der Symbolik steht)

y gleich f von x (vornehmlich, wenn ein Gleichheitszeichen in der Symbolik steht)

y ist das Bild von x unter der Abbildung f

Davon zu unterscheiden ist die Sprech- und Schreibweise: *„ y ist eine Funktion von x “,* die vor allem in der Physik sehr nahestehenden Bereichen der Mathematik auftaucht. Sie ist die ältere und ursprüngliche Sprech- und Schreibweise und beschreibt die Abhängigkeit einer Variablen y von einer anderen Variablen x , im Gegensatz dazu, dass mit Hilfe der Variablen x und y (stellvertretend) die Zuordnung bestimmter Elemente von Mengen beschrieben wird. Die *„physikalische“* Sprechweise stammt von dem Vorgehen, zunächst zwei veränderlichen Größen (der physikalischen Realität) Symbole, nämlich die Variablen x und y , zuzuordnen und *danach* deren Abhängigkeit festzustellen. Steht beispielsweise y für die Raumtemperatur und x für die Zeit, so wird man feststellen können, dass sich die Raumtemperatur in Abhängigkeit von der Zeit ändert und somit *„die Raumtemperatur eine Funktion der Zeit ist“* oder stellvertretend *„ y eine Funktion von x ist.“*

Statt *Definitionsmenge D* wird auch *Definitionsbereich, Urbildmenge* oder schlicht *Urbild* gesagt. Die Elemente von D heißen *Funktionsargumente*, *Funktionsstellen* oder *Urbilder,* salopp auch *x -Werte.* Die Zielmenge Z wird auch *Wertemenge* oder *Wertebereich* genannt, die Elemente von Z heißen *Zielwerte* oder *Zielelemente,* salopp auch *y -Werte*. Diejenigen Elemente von Z , die tatsächlich auch als Bild eines Arguments auftreten, heißen *Funktionswerte, Bildelemente* oder schlicht *Bilder*.

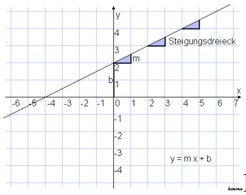
4 Darstellung

Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R},\ U \subseteq \mathbb{R}$, kann man visualisieren, indem man ihren Graphen in ein (zweidimensionales) Koordinatensystem zeichnet. Der Funktionsgraph einer Funktion f kann mathematisch definiert werden als die Menge aller Elementepaare $(x|y)$, für die $y = f(x)$ ist. Der Graph einer stetigen Funktion auf einem zusammenhängenden Intervall bildet eine zusammenhängende Kurve (genauer: die Menge der Punkte der Kurve, aufgefasst als Unterraum des topologischen Raumes $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend).

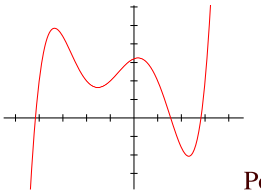
Analog kann man Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}^2, U \subseteq \mathbb{R}$, und $g\colon U \to \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^2$, visualisieren, indem man sie in ein dreidimensionales Koordinatensystem zeichnet. Ist f stetig, so ergibt sich eine Kurve (die auch Ecken haben kann), die sich durch das Koordinatensystem „schlängelt“. Ist g stetig, so ergibt sich eine Fläche als Bild, typischerweise in Form einer „Gebirgslandschaft“.

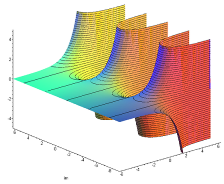
Computerprogramme zur Darstellung von Funktionen heißen Funktionenplotter. Funktionsprogramme gehören auch zum Funktionsumfang von Computeralgebrasystemen (CAS), matrizenfähigen Programmierumgebungen wie MATLAB, Scilab, GNU Octave und anderen Systemen. Die wesentlichen Fähigkeiten eines Funktionenplotters sind auch auf einem graphikfähigen Taschenrechner verfügbar. Es gibt auch Web-gestützte Angebote, die nur einen aktuellen Browser benötigen.

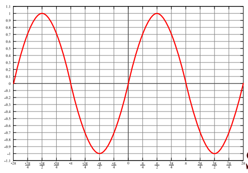
- Beispiele einiger Funktionsgraphen

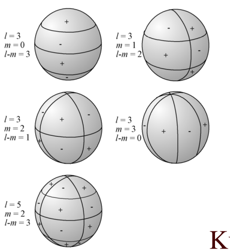
- 

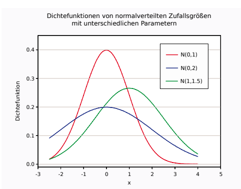
Lineare Funktion (genauer: Affine Abbildung)

- 
Polynomfunktion 5. Grades

- 
Realteil der komplexen Exponentialfunktion

- 
Sinusfunktion

- 
Kugelflächenfunktion

- 

Gaußsche Glockenkurve

5 Grundeigenschaften

5.1 Bild und Urbild

→ *Hauptartikel: Bild (Mathematik) und Urbild (Mathematik)*

Das Bild eines Elements x der Definitionsmenge ist einfach der Funktionswert $f(x)$. Das Bild einer Funktion ist die Menge der Bilder aller Elemente der Definitionsmenge D , also

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

Das Bild einer Funktion ist folglich eine Teilmenge der Zielmenge und wird Bildmenge genannt. Das Urbild eines Elements y der Zielmenge ist die Menge aller Elemente der Definitionsmenge, deren Bild y ist. Man schreibt

$$f^{-1}(y) = \{x \in D \mid f(x) = y\}$$

Das Urbild einer Teilmenge T der Zielmenge ist die Menge aller Elemente der Definitionsmenge, deren Bild Element dieser Teilmenge ist:

$$f^{-1}(T) = \{x \in D \mid f(x) \in T\}$$

5.2 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

→ *Hauptartikel: Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

- Eine Funktion ist injektiv, wenn jedes Element der Zielmenge höchstens ein Urbild hat. D. h., aus $f(x_1) = y = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
- Sie ist surjektiv, wenn jedes Element der Zielmenge mindestens ein Urbild hat. D. h., zu beliebigem y gibt es ein x , sodass $f(x) = y$.
- Sie ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist, wenn also jedes Element der Zielmenge genau ein Urbild hat.

5.3 Stelligkeit

→ *Hauptartikel: Stelligkeit*

Eine Funktion $f\colon X \to Y$, deren Definitionsmenge X eine Produktmenge $X = A \times B$ ist, heißt oft *zweistellig*. Den Wert von f , der bei Anwendung von f auf das Paar (a, b) erhalten wird, bezeichnet man mit $f(a, b)$.

Analoges gilt für höhere Stelligkeiten. Eine Funktion $f\colon A \times B \times C \to D$ bezeichnet man üblicherweise als *dreistellig*. Eine Funktion, deren Definitionsmenge keine Produktmenge ist (oder bei der die innere Struktur der Definitionsmenge keine Rolle spielt) bezeichnet man als *einstellig*. Unter einer nullstelligen Funktion versteht man eine Funktion, deren Definitionsmenge das leere Produkt $\{()\} = \{\emptyset\}$ ist.

Statt einstellig, zweistellig, dreistellig sagt man auch oft unär, binär, ternär; Stelligkeit wird daher auch als „Arität“ (englisch: arity) bezeichnet.

5.4 Menge der Funktionen

Mit B^A, ${}^AB$ oder Abb(A, B) wird die Menge aller Abbildungen von A nach B bezeichnet:

$$B^A := \{f \mid f\colon\ A \to B\}$$

6 Operationen

6.1 Einschränkung

→ *Hauptartikel: Einschränkung*

Die Einschränkung einer Funktion $f\colon A \to B$ auf eine Teilmenge C der Definitionsmenge A ist die Funktion $f|_C\colon C \to B$, deren Graph durch

$$G_{f|_C} = G_f \cap (C \times B) = \{(x, y) \in G_f \mid x \in C\}$$

gegeben ist.

6.2 Umkehrfunktion

→ *Hauptartikel: Umkehrfunktion*

Zu jeder bijektiven Funktion $f\colon A \to B$ gibt es eine Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon B \to A,\, y \mapsto f^{-1}(y)$$

sodass $f^{-1}(y)$ das eindeutig bestimmte Element $x \in A$ ist, für das $f(x) = y$ gilt. Die Umkehrfunktion erfüllt damit für alle $x \in A$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Bijektive Funktionen werden daher auch als eindeutig umkehrbare Funktionen bezeichnet.

6.3 Verkettung

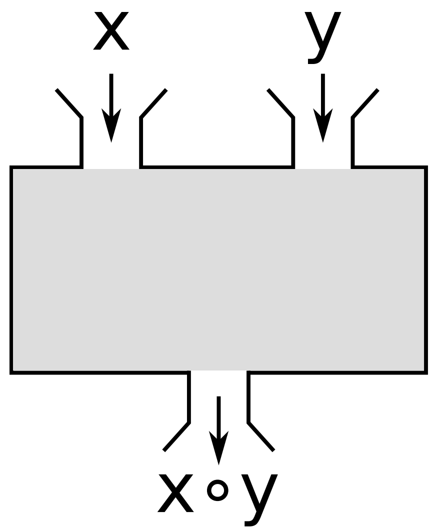
→ *Hauptartikel: Komposition (Mathematik)*

Zwei Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$, bei denen der Wertebereich der ersten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten Funktion übereinstimmt, können verkettet werden. Die Verkettung oder Hintereinanderausführung dieser beiden Funktionen ist dann eine neue Funktion, die durch

$$g \circ f\colon A \to C,\, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

gegeben ist. In dieser Notation steht meist die zuerst angewandte Abbildung rechts, das heißt bei $g \circ f$ wird zuerst die Funktion f angewandt und dann die Funktion g . Gelegentlich wird in der Literatur allerdings auch die umgekehrte Reihung verwendet und $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ geschrieben.

6.4 Verknüpfung



Eine zweistellige Verknüpfung ist eine Abbildung, die allen Paaren von Argumenten x und y das Endergebnis $x \circ y$ zuordnet.

Ist auf der Zielmenge B eine innere zweistellige Verknüpfung $*\colon B \times B \to B$ gegeben, so lässt sich auch für Funktionen $f, g \in B^A$ eine innere zweistellige Verknüpfung definieren:

$$f * g\colon A \to B,\, x \mapsto (f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

Beispiele hierfür sind die punktweise Addition und Multiplikation von Funktionen. Weiter lässt sich mit Hilfe einer äußeren zweistelligen Verknüpfung der Form $*\colon C \times B \to B$ auch die Verknüpfung einer Funktion mit einem Element aus C definieren:

$$c * f\colon A \to B,\, x \mapsto (c * f)(x) = c * f(x)$$

Beispiel hierfür ist die punktweise Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar. Analog lässt sich so auch eine äußere Verknüpfung der Form $f * c$ definieren. Sind

Verknüpfungen der gleichen Art sowohl auf der Definitionsmenge, als auch auf der Zielmenge gegeben, dann heißt eine Funktion verträglich mit diesen Verknüpfungen, wenn sich die Bilder bezüglich der einen Verknüpfung genauso verhalten wie die Urbilder bezüglich der anderen Verknüpfung.

7 Weitere Eigenschaften

7.1 Algebraische Eigenschaften

- Eine Funktion ist idempotent, wenn $f \circ f = f$ ist, d. h. $f(f(x)) = f(x)$ für alle Elemente x der Definitionsmenge gilt.
- Sie ist eine Involution, wenn $f \circ f = \mathrm{id} \neq f$ ist, also $f(f(x)) = x$ für alle Elemente x der Definitionsmenge gilt und für mindestens ein x_0 der Definitionsmenge $f(x_0) \neq x_0$ ist.
- Ein *Fixpunkt* ist ein Element a der Definitionsmenge von f , für das $f(a) = a$ gilt.
- Identität
- Konstanz

7.2 Analytische Eigenschaften

- Beschränktheit
- Periodizität
- Monotonie
- Symmetrie
- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Glattheit
- Holomorphie
- Homogenität
- Messbarkeit
- Integrierbarkeit
- Konvexität

8 Spezielle Funktionen

- reellwertige Funktion, welche sich dadurch auszeichnet, dass ihre Zielmenge innerhalb der reellen Zahlen liegt
- komplexwertige Funktion, welche sich dadurch auszeichnet, dass ihre Zielmenge innerhalb der komplexen Zahlen liegt
- homogene lineare Funktion (auch: Proportionalität): allgemein beschrieben durch $f(x) = mx$; ist ein Homomorphismus bezüglich der Addition
- allgemeine lineare Funktion (oder *affine Funktion*): allg. beschrieben durch $f(x) = ax + b$; siehe auch affine Abbildung
- Quadratische Funktion: allg. beschrieben durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ (s. Quadratische Gleichung)
- Potenzfunktion
- Polynomfunktionen; auch ganzrationale Funktion: allg. beschrieben durch $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ oder $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
- Rationale Funktion; gebrochen-rationale Funktion: Quotient zweier Polynom-Funktionen, $f(x) = g(x)/h(x)$
- Wurzelfunktion: besteht aus gebrochenrationalen Funktionen, verknüpft durch die Grundrechenarten und Wurzelausdrücke
- Exponentialfunktion
- Logarithmus
- Trigonometrische Funktion: sin, cos, tan, cot, sec, csc
- Betragsfunktion
- Maximumsfunktion und Minimumsfunktion
- Gaußsche Ganzzahlfunktion

9 Verwendung

Ein fundamentales Konzept in der Mathematik stellen Strukturen dar, die dadurch entstehen, dass Mengen in Verbindung mit dazugehörigen Abbildungen gesehen werden. Derartige Strukturen bilden die Grundlage praktisch aller mathematischen Disziplinen, sobald sie über elementare Mengenlehre, kombinatorische Probleme oder grundlegende mathematisch-philosophische Fragestellungen hinausgehen.

Mengen können beispielsweise durch sogenannte Verknüpfungen strukturiert werden. Der wichtigste Spezialfall ist die innere zweistellige Verknüpfung, dabei handelt es sich um eine Abbildung der Form $f\colon A \times A \to A$. Beispiele für innere zweistellige Verknüpfungen sind Rechenoperationen, wie die Addition oder Multiplikation auf Zahlenmengen. Dementsprechend wird das Bild $*(x, y)$ eines Paares (x, y) unter einer Verknüpfung $*$ üblicherweise in der Form $x * y$ geschrieben.

Weitere wichtige Beispiele solcher Strukturen sind algebraische, geometrische und topologische Strukturen, wie beispielsweise Skalarprodukte, Normen und Metriken.

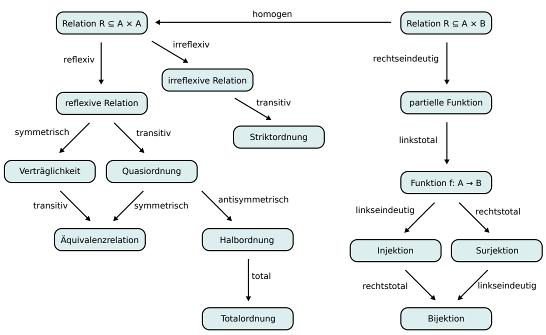
10 Verallgemeinerungen

10.1 Multifunktionen

Eine Multifunktion (auch mehrwertige Funktion oder Korrespondenz genannt) ist eine linkstotale Relation. Das heißt, die Elemente der Definitionsmenge X können auf mehrere Elemente der Zielmenge Y abgebildet werden. Man schreibt auch $f\colon X \multimap Y$. Ein Beispiel für Multifunktionen sind die Umkehrfunktionen von nicht injektiven Funktionen. (Wenn $f\colon X \to Y$ surjektiv ist, gilt automatisch: $f^{-1}\colon Y \multimap X$ ist eine Multifunktion.)

Wenn Y eine Menge ist, dann kann man jede Multifunktion $f\colon X \multimap Y$ auch als eine Funktion $\tilde{f}$ darstellen, die in die Potenzmenge von Y geht: $\tilde{f}\colon X \to \wp(Y)$.

10.2 Partielle Funktionen



Die partielle Funktion und ihre Untermenge die Funktion als spezielle Relationen

Wohlzuunterscheiden vom Begriff der Funktion ist der Begriff der partiellen Funktion, man spricht auch von einer „nicht überall definierten Funktion“ oder „funktionalen Relation“. Hier darf es Elemente der Quellmenge (x -Werte) geben, denen kein Wert der Zielmenge (y -Wert) zugeordnet ist. Hier ist dann die Nennung der Quellmenge in der obigen Tripelschreibweise tatsächlich notwendig. Allerdings darf es auch dort für einen x -Wert nicht mehr als einen y -Wert geben. Um partielle Funktionen von Funktionen zu unterscheiden, bezeichnet man letztere auch als totale oder überall definierte Funktionen.

10.3 Funktionen mit Werten in einer echten Klasse

Häufig liegen die Werte einer Funktion nicht in einer Zielmenge, sondern lediglich in einer echten Klasse, beispielsweise sind Mengenfolgen „Funktionen“ mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$ und Werten in der Allklasse. Um die mengentheoretischen Probleme, die sich daraus ergeben, zu vermeiden, betrachtet man nur noch den Graph der entsprechenden Funktion, genauer: Ein *funktionsartiger Graph* ist eine Menge G von Paaren (x, y), so dass keine zwei Paare im ersten Eintrag übereinstimmen:[8]

$$\forall x, y_1, y_2\colon\ (x, y_1), (x, y_2) \in G \implies y_1 = y_2$$

Definitions- und Wertemenge sind tatsächlich Mengen, aber es ist nicht nötig, sich von vornherein auf eine Ziel*menge* festzulegen.

11 Symbolik

Für Funktionen gibt es etliche symbolische Schreibweisen, die jeweils einige spezielle Eigenschaften der Funktion ausdrücken. Im Folgenden werden einige wichtige genannt.

Die Symbole können auch, wo sinnvoll, miteinander kombiniert werden.

12 Siehe auch

- Gottlob Frege: Funktion und Begriff (der Begriff als Funktion)
- Funktionsschar
- Funktion höherer Ordnung
- Versicherungsmathematische Funktion

13 Literatur

- Heinz-Dieter Ebbinghaus: *Einführung in die Mengenlehre.* 4. Auflage. Spektrum, Akademischer Verlag, Heidelberg u. a. 2003, ISBN 3-8274-1411-3.
- Paul R. Halmos: *Naive Mengenlehre* (= *Moderne Mathematik in elementarer Darstellung.* Bd. 6). Übersetzt von Manfred Armbrust und Fritz Ostermann. 5. Auflage. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1994, ISBN 3-525-40527-8.
- Arnold Oberschelp: *Allgemeine Mengenlehre.* BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim u. a. 1994, ISBN 3-411-17271-1.

- Adolf P. Youschkevitch: *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century.* In: *Archive of the History of Exakt Sciences*, 16, Springer Verlag, Berlin 1976

14 Weblinks

Wikibooks: Mathe für Nicht-Freaks: Abbildung, Funktion – Lern- und Lehrmaterialien
Wiktionary: Funktion – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen
Commons: Funktionen – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien

15 Einzelnachweise

[1] M. Kronfellner: *Historische Aspekte im Mathematikunterricht.* Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1998, S. 67.

[2] Adolf P. Youschkevitch: *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century.* In: *Archive of the History of Exakt Sciences*, 16, Springer Verlag, Berlin 1976, S. 52.

[3] D. Rüthing: *Einige historische Stationen zum Funktionsbegriff*. In: *Der Mathematikunterricht*, Heft 6/1986, Friedrich Verlag Velber, S. 5/6.

[4] H.-J. Vollrath: *Algebra in der Sekundarstufe.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994, S. 118.

[5] Rüthing, S. 6–12.

[6] Arnold Oberschelp: *Allgemeine Mengenlehre.* 1994.

[7] Paul R. Halmos: Naive Mengenlehre. 1994, Kapitel 8, S. 43.

[8] Nicolas Bourbaki: *Éléments de mathématiques. Théorie des Ensembles.* II.

16 Text- und Bildquellen, Autoren und Lizenzen

16.1 Text

- **Funktion (Mathematik)** *Quelle:* https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)?oldid=165642518 *Autoren:* Rade Kutil, Unukorno, Fgb, Andre Engels, Fristu, Nerd, JakobVoss, Zeno Gantner, Jed, Aka, Mikue, Stefan Birkner, Marco Krohn, Head, Hhoffmann, Markobr, GNosis, Glenn, Crux, Atman Sun, Tsor, ApeBot, Wzwz, SirJective, Elya, Blubbalutsch, HenrikHolke, Honina, Wipape, Aglarech, Rainer Bielefeld, Wuzel, Geof, D, Wolfgang1018, Nikai, Streetlife, Robbot, Karl-Henner, LigaDue, HaSee, Boehm, Eliashedberg, Frau Holle, Jan eissfeldt, Adalbert, Peter200, Darkone, Montauk, Wimmerm, Martin-vogel, Ot, P. Birken, Xorx77, Gerhardvalentin, Gauss, Unyxos, Anneke Wolf, Philipendula, Matthy, Forbfruit, Duesentrieb, KL47, WiESi, AndyThaller, Stefan h, DasBee, Marc van Woerkom, Sledge, Slipstream, Benderson, Wfstb, Rauschbaer, Qwqchris, Magnummandel, Lustiger seth, Plaicy, Sabata, Taxiarchos228, Simon04, Traitor, Blacksun~dewiki, Fit, Tuxman, Bobu, Heinte, Mocy, He3nry, Herr Andrax, NeoUrfahraner, Andreas99, Schlurcher, Honeybal, Curtis Newton, O.Koslowski, Gpvos, Kolossos, Gunther, Zebrafink, Docmo, FritzG, Siehe-auch-Löscher, David314, Erzbischof, Bsmuc64, Peter Grabs, Chobot, Edelweiß, Markus Schmaus~dewiki, MathiasWinkler, Ephraim33, Alfred Grudszus, Pajz, Gardini, RobotQuistnix, ParaDox, YurikBot, Na-oma, Wasseralm, Toffel, Saibo, UrsZH, DerHexer, WAH, Klaeren, Thukydides, SpBot, Kaisersoft, Gugerell, LKD, Jü, JaynFM, Chlewbot, Shadak, Djat, Logograph, Michi82, Mfb, Richardigel, Invisigoth67, Rosentod, Georg Roch, Janpol, Ranas, Cliffhanger, Hans-Jürgen Streicher, Lupussy, Andreas 06, BesondereUmstaende, Armin P., Jaellee, Zaibatsu, Roo1812, EdwardBaynes, Spuk968, Thijs!bot, DonnieBrasco, Schojoha, Jobu0101, Leider, Horst Gräbner, Hanfried.lenz, Jckr, Doj°, JAnDbot, DrLemming, Enlil2, Kuhlo, ComillaBot, Soulbot, Louis Bafrance, Wybot, Markus Prokott, KleinKlio, Numbo3, Don Magnifico, MichaelHSchaefer, Zollernalb, Methossant, RacoonyRE, PerfektesChaos, SashatoBot, Complex, Digamma, VolkovBot, Waldi66, DorganBot, AlnoktaBOT, TXiKiBoT, Tauriel, BB-Kurt, Die Alex, Quilbert, Rei-bot, Gbeckmann, Regi51, Boonekamp, BurghardRichter, Idioma-bot, Alexandar.R.~dewiki, AlleborgoBot, OecherAlemanne, ChrisHamburg, Krawi, Stephan Kulla, BotMultichill, SieBot, Der.Traeumer, Eulenspiegel1, Engie, Chricho, Funkruf, Gsälzbär, Xario, Udjat, Alexkin, Alnilam, Pittimann, Christian1985, ToePeu.bot, Se4598, Woches, Ute Erb, Steak, Sewenz, Kein Einstein, FranzR, BOTarate, Sinuspi, Griot, DumZiBoT, Cäsium137, Hederich, SilvonenBot, Sprachpfleger, Geek1337, JonBs, L47, LinkFA-Bot, Pwjg, Eltnap, NjardarBot, H.Marxen, AlfonsGeser, Numbo3-bot, Pearcheater, RPI, Luckas-bot, UKoch, KamikazeBot, Pberndt, PlayDead, GrouchoBot, Tesat, Ersguterjunge1, Björn Hagemann, Xqbot, Laubbaum, Christian140, Howwi, WissensDürster, Geierkrächz, RibotBOT, Quartl, BKSlink, LucienBOT, Jivee Blau, Serols, Timk70, Corrigo, Toxilly, Mekeor, Daniel5Ko, Dinamik-bot, Martin1978, EmausBot, BFeuerbacher, Che Netzer, ZéroBot, Neun-x, WikitanvirBot, Randolph33, ChuispastonBot, Liuthar, Achim55, To.be.or.not.to.be, EHaseler, MerlIwBot, KLBot2, Albe ni, Scintz, HilberTraum, BuschBohne, 123qweasd, Wheeke, Yodonothav, Radiojunkie, Dexbot, Exoport, KaliNala, NikelsenH, Melody Lavender, Argetula, JonskiC, Si je puis, TaxonBot, □□, DOWIMA, FNDE, Schatzilein2015, Schorschi3963, Iason96, Wdelin und Anonyme: 294

16.2 Bilder

- **Datei:Binary_operations_as_black_box.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/79/Binary_operations_as_black_box.svg *Lizenz:* CC0 *Autoren:* Eigenes Werk *Ursprünglicher Schöpfer:* Talonnn
- **Datei:Commons-logo.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Commons-logo.svg *Lizenz:* Public domain *Autoren:* This version created by Pumbaa, using a proper partial circle and SVG geometry features. (Former versions used to be slightly warped.) *Ursprünglicher Schöpfer:* SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.
- **Datei:Exp_re.png** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/92/Exp_re.png *Lizenz:* Public domain *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:Harmoniques_spheriques_positif_negatif.png** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Harmoniques_spheriques_positif_negatif.png *Lizenz:* CC-BY-SA-3.0 *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:Linear_Function.png** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ee/Linear_Function.png *Lizenz:* CC-BY-SA-3.0 *Autoren:* Übertragen aus de.wikipedia nach Commons durch ×□×□ mithilfe des CommonsHelper. *Ursprünglicher Schöpfer:* Der ursprünglich hochladende Benutzer war Honina in der Wikipedia auf Deutsch
- **Datei:Normal_density-3.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/93/Normal_density-3.svg *Lizenz:* CC BY-SA 2.0 *Autoren:* Mit GNU R erzeugt (dnorm(x,m=0,sd=2)) *Ursprünglicher Schöpfer:* Oder Zeichner: Thomas Steiner
- **Datei:Polynomialdeg5.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/55/Polynomialdeg5.svg *Lizenz:* CC BY-SA 3.0 *Autoren:* Eigenes Werk *Ursprünglicher Schöpfer:* Geek3
- **Datei:Sin.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b2/Sin.svg *Lizenz:* Public domain *Autoren:* self-made; graphed in GNUPlot edited in Illustrator *Ursprünglicher Schöpfer:* Self: Commons user Keytotime
- **Datei:Types_of_relation_ti.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Types_of_relation_ti.svg *Lizenz:* Public domain *Autoren:* Created by me (PNG version of image placed in the public domain by its author http://de.wikipedia.org/wiki/Benutzer:KonradVoelkel) *Ursprünglicher Schöpfer:* Me, myself and(?) http://de.wikipedia.org/wiki/Benutzer:KonradVoelkel
- **Datei:Wikibooks-logo.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fa/Wikibooks-logo.svg *Lizenz:* CC BY-SA 3.0 *Autoren:* Eigenes Werk *Ursprünglicher Schöpfer:* User:Bastique, User:Ramac et al.
- **Datei:Wiktfavicon_en.svg** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Wiktfavicon_en.svg *Lizenz:* CC BY-SA 3.0 *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?

16.3 Inhaltslizenz