# Komplexe Zahlen/ Darstellungsformen

< Komplexe Zahlen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit verschiedenen Formen, die komplexen Zahlen darzustellen, und weist jeweils auf Rechenverfahren hin. Auch wenn die ersten Darstellungsformen eng zusammengehören, werden sie wegen der besseren Übersichtlichkeit getrennt behandelt.

## Inhaltsverzeichnis



## Die algebraische Form

Dabei handelt es sich um die Schreibweise $z = a + b\,\mathrm{i}$ aus dem vorigen Kapitel. Sie wird auch als **arithmetische Form** bezeichnet.

Die Grundrechenarten dafür werden jetzt als bekannt vorausgesetzt.

## Die Gauß'sche Zahlenebene

Die Zahlengerade ist eine geometrische Darstellung aller reellen Zahlen. Die komplexen Zahlen sind „mehr“, können also auf ihr nicht untergebracht werden. Wir müssen also die reelle Zahlengerade zur Gauß'schen Zahlenebene[1] erweitern – auch kürzer *komplexe Ebene* oder *Gauß'sche Ebene* genannt.

Betrachten wir zunächst die (rein-)imaginären Zahlen als Produkte der reellen Zahlen mit *i*, also die folgenden Zahlen und alle dazwischenliegenden Werte:

$$\ldots\ -3\,\mathrm{i},\ -2\,\mathrm{i},\ -\mathrm{i},\ 0,\ \mathrm{i},\ 2\,\mathrm{i},\ 3\,\mathrm{i}\ \ldots$$

Diese Zahlen können wir auf eine eigene, die „imaginäre Zahlengerade“ abbilden. Dabei ist es zweckmäßig, die „imaginäre Einheitsstrecke“ gleich der reellen Einheitsstrecke zu machen. Da die beiden Zahlengeraden die Null gemeinsam haben, müssen wir sie so anordnen, dass sie einander in 0 schneiden. Schon aus Symmetriegründen erscheint es zweckmäßig, die beiden Zahlengeraden senkrecht zueinander anzubringen.

Die horizontale Achse heißt **reelle Achse,** die vertikale Achse wird **imaginäre Achse** genannt.

> **Hinweis**
>
> Auch auf der imaginären Achse werden reelle Zahlen aufgezeigt – nicht, wie oft zu sehen ist, imaginäre.

Aus dieser Grafik lassen sich bereits drei Dinge herauslesen:

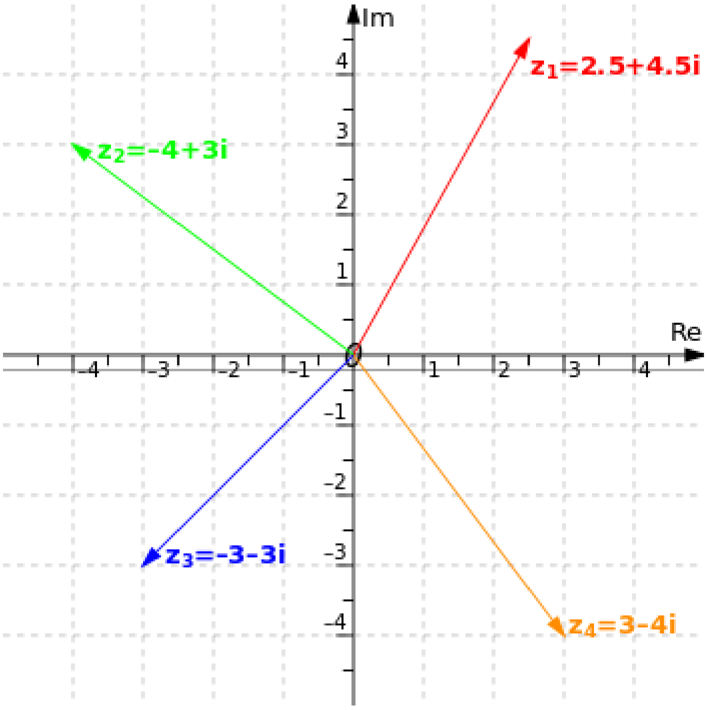
1. Komplexe Zahlen lassen sich nicht ordnen. Es existieren also keine Aussagen wie $z_1 < z_2$.
2. Die zu $z$ konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ ist, geometrisch gesprochen, die Spiegelung des Punktes $z = (a|b)$ an der reellen Achse (ähnlich dem Beispiel mit $z_1$ und $z_3$ in dieser Grafik).
3. Jeder komplexen Zahl kann ein Punkt $z = (a|b)$ zugeordnet werden oder auch ein Vektor von $(0|0)$ zu $(a|b)$.

Aus dieser Eigenschaft lassen sich die Rechenregeln für die Addition und Subtraktion herleiten. Vektoren können komponentenweise addiert und subtrahiert werden. Hier ein kleines Beispiel zur Erinnerung:

$$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

Wenn wir dieses Prinzip auf die komplexen Zahlen übertragen, erhalten wir die bereits bekannten Regeln:

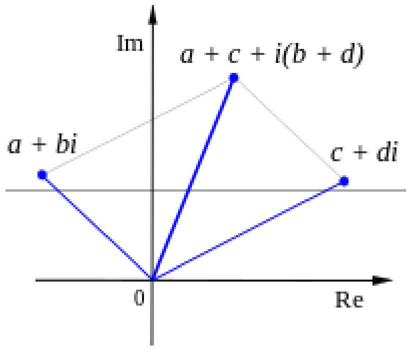
- Bei der **Addition** der komplexen Zahlen werden die Realteile und die Imaginärteile jeweils für sich addiert.
- Bei der **Subtraktion** werden die Realteile und die Imaginärteile voneinander subtrahiert.




Dies legt nahe, dass wir die Addition und Subtraktion auch grafisch darstellen können und zwar ebenfalls nach den Regeln der Vektorgeometrie (siehe die nebenstehende Darstellung).

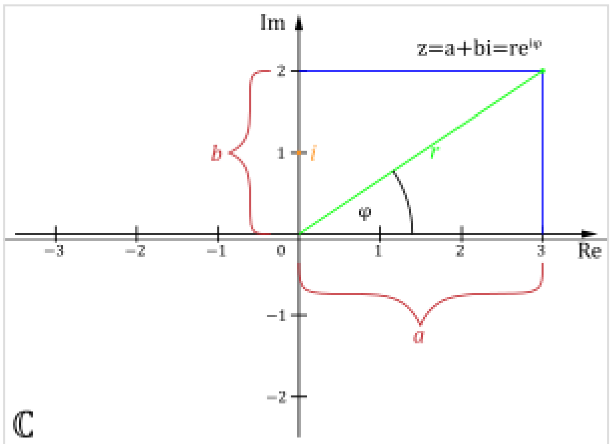
Die Illustration von Multiplikation und Division wird auf den nächsten Abschnitt verschoben, wo es leichter verständlich wird (zumal es bei Vektoren mehrere Arten der Multiplikation gibt).

Der **Betrag** wiederum entspricht der Länge des Vektors $\binom{a}{b}$, was sich einfach mit dem Satz des Pythagoras erklärt.




# Die Polarform

Schreibt man die komplexe Zahl $z=(a|b)$ nicht in kartesischen Koordinaten, sondern in Polarkoordinaten, so erhält man die Polarform einer komplexen Zahl, die sich einfach aus der Trigonometrie ergibt:




$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \tfrac{a}{r} && \Rightarrow & a &= r\cos\varphi && \Rightarrow & \varphi &= \arccos\tfrac{a}{r}\\
\sin\varphi &= \tfrac{b}{r} && \Rightarrow & b &= r\sin\varphi && \Rightarrow & \varphi &= \arcsin\tfrac{b}{r}\\
\tan\varphi &= \tfrac{b}{a} && \Rightarrow & \varphi &= \arctan\tfrac{b}{a}\\
r &= \sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

Das verwenden wir zur Definition der Polarform einer komplexen Zahl:

**Definition** (Polarform einer komplexen Zahl)

| | |
|---|---|
| $z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$ | wird als **Polarform** bezeichnet. |
| $z = r \cdot \operatorname{cis}\varphi$ | ist eine abgekürzte Schreibweise. |
| $z = (r, \varphi)$ | ist eine weitere Schreibweise. |
| $\varphi = \arg(z)$ | Der Winkel $\varphi$ heißt **Argument** von $z$. |
| $\lvert z \rvert = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ | ist der **(absolute) Betrag** von $z$. |

Dabei müssen die Mehrdeutigkeit und der Wertebereich des Arkustangens berücksichtigt werden:

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k \cdot \pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

Der Wert $\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$ heißt **Hauptwert** von $\varphi$.

Oben hatten wir bereits festgestellt, dass die konjugiert-komplexe Zahl der Spiegelung an der reellen Achse entspricht. In der Polarform können wir das (unter Berücksichtigung der Symmetrien von Sinus und Kosinus) auch so formulieren.

$$\begin{aligned}\overline{z} &= r \cdot (\cos\varphi - \mathrm{i} \cdot \sin\varphi) \\ &= r \cdot (\cos(-\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\varphi))\end{aligned}$$

Die folgenden Formulierungen über zwei konjugiert-komplexe Zahlen $z$ und $\overline{z}$ sind also gleichbedeutend:

1. Die Realteile sind gleich, die Imaginärteile unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.
2. Die den Zahlen entsprechenden Punkte liegen symmetrisch zur reellen Achse.
3. Die Beträge sind gleich, die Argumente unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

## Zur Eindeutigkeit des Arguments

Der Bezug auf den **Arkustangens** macht deutlich: Bei der Berechnung des Winkels $\varphi$ ist Vorsicht geboten! Nehmen wir zu einer komplexen Zahl $z = (a|b)$ mit positivem *a* und *b* sowohl die konjugiert-komplexe Zahl $z_1 = (a| - b)$ (also an der reellen Achse gespiegelt) als auch die Zahl $z_2 = (-a|b)$ (also an der imaginären Achse gespiegelt). Die Berechnung des Winkels ergibt dann:

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) \quad \text{sowie} \quad \varphi_2 = \arctan\left(\frac{b}{-a}\right)$$

In beiden Fällen liefert der Arkustangens denselben Wert. Aber offensichtlich liegen beide Zahlen in verschiedenen Quadranten, also handelt es sich um zwei verschiedene Winkel. $z_1$ liegt im vierten Quadranten, also muss $\varphi_1$ zwischen 270° und 360° betragen. Für $z_2$ im zweiten Quadranten beträgt $\varphi_2$ zwischen 90° und 180°. Tatsächlich entspricht dies der Mehrdeutigkeit des Arkustangens, der nur innerhalb eines Bereichs – beispielsweise von –90° bis +90° – eindeutig ist.

Ebenfalls problematisch sind die Zahlen $z_3 = (0|b)$ und $z_4 = (0| - b)$, weil $\arctan\left(\frac{\mp b}{0}\right)$ nicht definiert ist. Wegen der Lage im Koordinatensystem können wir den Winkel trotzdem genau angeben: Offensichtlich gelten $\varphi_3 = 90°$ und $\varphi_4 = 270°$ .

Man kann also aus der Lage eines Punktes in den einzelnen Quadranten oder auf den Achsen leicht entscheiden, in welchem Bereich der Winkel zu einer bestimmten Zahl liegen muss. Man kann das aber auch durch eine Fallunterscheidung ausdrücken; zusammen mit der üblichen Schreibweise, in der 180° durch $\pi$ ersetzt wird, ergibt sich dann:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0,\ b \geq 0 & (\text{1. Quadrant}) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \text{für } a > 0,\ b < 0 & (\text{4. Quadrant}) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0 & (\text{2./3. Quadrant}) \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0,\ b > 0 & (\text{positive Im-Achse}) \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } a = 0,\ b < 0 & (\text{negative Im-Achse}) \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0,\ b = 0 & (\text{Nullpunkt}) \end{cases}$$

Mit dem **Arkuskosinus** ergibt sich eine einfachere Fallunterscheidung. (Der Arkustangens hängt direkt mit *a* und *b* zusammen; deshalb hat er sich für die vorstehenden Überlegungen angeboten.) Der Arkuskosinus ist eindeutig im Bereich von 0 bis $\pi$. Für diesen Bereich – den ersten und zweiten Quadranten, also für $b \geq 0$ – können wir direkt die erste Umrechnungsformel der Polarform (zur ersten Grafik oben) verwenden.

Für $b < 0$ nutzen wir die Symmetrie und die Periodizität des Kosinus. Die Symmetrie an der reellen Achse liefert zu jeder komplexen Zahl die konjugiert-komplexe Zahl (also mit gleichem Realteil *a* und Vorzeichenwechsel beim Imaginärteil *b*). Bezeichnen wir nun mit $\varphi$ den gesuchten Winkel (im vierten oder dritten Quadranten) und mit $\varphi_1$ den Winkel der konjugiert-komplexen Zahl (im ersten bzw. zweiten Quadranten). Für eine komplexe Zahl im vierten Quadranten ergibt sich unmittelbar $\varphi = -\varphi_1$. Für eine komplexe Zahl im dritten Quadranten verwenden wir die Differenz zwischen den Winkeln der zueinander konjugiert-komplexen Zahlen und der reellen Achse: Die Differenz beträgt $\pi - \varphi_1$ und liefert – zusammen mit der Periode $2\pi$ – ebenfalls:

$$\varphi \ = \ \pi + (\pi - \varphi_1) \ = \ 2\pi - \varphi_1 \ \equiv \ -\varphi_1 \quad \text{mod } 2\pi$$

Zusammengefasst liefert das folgende Fallunterscheidung:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{a}{r}\right) & \text{für } b \geq 0 & (\text{1. und 2. Quadrant}) \\ -\arccos\left(\frac{a}{r}\right) & \text{für } b < 0 & (\text{3. und 4. Quadrant}) \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0,\ b = 0 & (\text{Nullpunkt}) \end{cases}$$

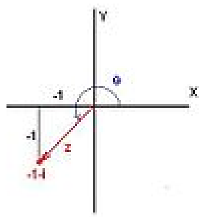
## Umrechnungen

### Algebraische Form in Polarform umwandeln

Hierfür benutzen wir in mehreren Beispielen die Überlegungen zur Eindeutigkeit des Arguments, und zwar sowohl mit dem Arkuskosinus[2] als auch mit dem Arkustangens.

**Beispiel 1**

$$z \ = \ -1 - \mathrm{i} \qquad \text{also} \quad a \ = \ -1 \quad \text{und} \quad b = -1$$



Die komplexe Zahl $z = -1 - \mathrm{i}$

Für den **Betrag** ergibt sich jedenfalls:

$$r \ = \ \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \ = \ \sqrt{2}$$

Der **Arkuskosinus** liefert für den Winkel eindeutig:

$$\begin{aligned} \varphi \ &= \ -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \ = \ -\arccos\left(\frac{-1}{2}\sqrt{2}\right) \ = \ \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \pi \\ &= \ \frac{\pi}{4} - \pi \ = \ -\frac{3}{4}\pi \ \equiv \ \frac{5}{4}\pi \quad \text{mod } 2\pi \end{aligned}$$

Mit dem **Arkustangens** erhalten wir die beiden möglichen Werte:

$$\tan\varphi \;=\; \frac{-1}{-1} = 1 \quad\Rightarrow\quad \varphi_1 \;=\; \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \varphi_2 \;=\; \frac{5\pi}{4}$$

Aus der Zeichnung ersehen wir, dass nur $\frac{5\pi}{4}$ als Argument in Frage kommt.

**Ergebnis** beider Varianten:

$$z \;=\; -1-\mathrm{i} \;=\; \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

**Beispiel 2**

$$z \;=\; 2+2\sqrt{3}\cdot\mathrm{i} \qquad \text{also} \quad a=2 \quad \text{und} \quad b=2\sqrt{3}$$

Für den **Betrag** ergibt sich:

$$|z| \;=\; r \;=\; \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} \;=\; \sqrt{4+12} \;=\; 4$$

Der **Arkuskosinus** liefert uns:

$$\varphi \;=\; \arccos\left(\frac{2}{4}\right) \;=\; \frac{\pi}{3}$$

Beim **Arkustangens** wird berücksichtigt, dass der Punkt im ersten Quadranten liegt (Realteil und Imaginärteil sind positiv). Berechnen wir dazu als Argument:

$$\tan\varphi \;=\; \frac{2\sqrt{3}}{2} \;=\; \sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \varphi \;=\; \tfrac{\pi}{3} \;=\; 60^\circ$$

Es **ergibt** sich für *z* als geometrische Darstellung ein Pfeil der Länge 4 unter 60° im ersten Quadranten mit folgender Polarform:

$$z \;=\; 2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i} \;=\; 4\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

**Beispiel 3**

$$z \;=\; -\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2} \qquad \text{also} \quad a=-\sqrt{6} \quad \text{und} \quad b=\sqrt{2}$$

Diese komplexe Zahl liegt mit negativem Realteil und positivem Imaginärteil im zweiten Quadranten. Durch die gleichen Berechnungen erhalten wir die Polarform:

| | |
|---|---|
| Betrag | $r \;=\; \sqrt{(-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2} \;=\; \sqrt{6+2} \;=\; 2\cdot\sqrt{2}$ |
| mit Arkuskosinus | $\varphi \;=\; \arccos\left(\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) \;=\; \frac{5}{6}\cdot\pi$ |
| mit Arkustangens | $\tan\varphi \;=\; \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} \;=\; -\sqrt{\frac{1}{3}} \;=\; -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \varphi \;=\; 150^\circ \;=\; \frac{5}{6}\pi$ |
| Polarform | $z \;=\; -\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2} \;=\; 2\cdot\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ |

Bei allen Beispielen führen beide Verfahren zum Ziel. Mal scheint die eine Variante praktischer (nämlich kürzer) zu sein, mal die andere.

### Polarform in algebraische Form umwandeln

Dabei müssen wir über Eindeutigkeit und Lage nicht nachdenken: Die gegebenen Werte werden einfach in die Formeln der Herleitung eingesetzt.

Zur komplexen Zahl mit $r = 6$ und $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ – also mit dem Winkel 300° im vierten Quadranten – ergibt sich die algebraische Form $z = 3 - 3\sqrt{3} \cdot \mathrm{i}$ wie folgt:

$$\begin{array}{rclclcl} a & = & 6 \cdot \cos(\frac{5\pi}{3}) & = & 6 \cdot \frac{1}{2} & = & 3 \\ b & = & 6 \cdot \sin(\frac{5\pi}{3}) & = & -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & = & -3 \cdot \sqrt{3} \end{array}$$

## Drehung

Betrachten wir die Vektoren der Länge 1 auf den vier Halbachsen:

$$\begin{array}{rcrcclc} z_1 & = & 1 + 0 \cdot \mathrm{i} & = & (1,0) & \text{mit dem Winkel} & \varphi = 0 \\ z_2 & = & 0 + 1 \cdot \mathrm{i} & = & (0,1) & \text{mit dem Winkel} & \varphi = \frac{\pi}{2} \\ z_3 & = & -1 + 0 \cdot \mathrm{i} & = & (-1,0) & \text{mit dem Winkel} & \varphi = \pi \\ z_4 & = & 0 - 1 \cdot \mathrm{i} & = & (0,-1) & \text{mit dem Winkel} & \varphi = \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

Die Vektoren zu den Zahlen $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ entstehen also durch aufeinanderfolgende Drehungen um jeweils $\frac{\pi}{2}$. Wenn wir diese Zahlen mit *i* multiplizieren, erhalten wir ein zunächst überraschendes Ergebnis:

$$\begin{array}{rcrcccr} z_1 \cdot \mathrm{i} & = & (1 + 0\,\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} & = & \mathrm{i} & = & z_2 \\ z_2 \cdot \mathrm{i} & = & (0 + 1\,\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} & = & \mathrm{i}^2 & = & -1 = z_3 \\ z_3 \cdot \mathrm{i} & = & (-1 + 0\,\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} & = & -\mathrm{i} & = & z_4 \\ z_4 \cdot \mathrm{i} & = & (0 - 1\,\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} & = & -\mathrm{i}^2 & = & +1 = z_1 \end{array}$$

Das gilt jedenfalls für genau diese Zahlen. Wir können aber sogar allgemein beweisen:

> **Satz** (Die Multiplikation mit *i* bedeutet eine positive Drehung um $\frac{\pi}{2}$.)
>
> Für eine beliebige Zahl $z = a + b\,\mathrm{i} = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ gilt:
>
> $$z \cdot \mathrm{i} \; = \; r\,(\cos\varphi' + \mathrm{i}\,\sin\varphi') \quad \text{mit} \quad \varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

> **Beweis**
>
> Zunächst gilt jedenfalls:
>
> $$z \cdot \mathrm{i} \; = \; (a + b\,\mathrm{i})\,\mathrm{i} \; = \; a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{i}^2 \; = \; -b + a\,\mathrm{i}$$
>
> Prüfen wir zunächst die Lage der Punkte $-b + a\,\mathrm{i}$ in den Quadranten:
>
> - Bei $z$ im ersten Quadranten gelten $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Also muss $z \cdot \mathrm{i}$ wegen $-b \leq 0$ und $a \geq 0$ im zweiten Quadranten liegen.
> - Bei $z$ im zweiten Quadranten gelten $a \leq 0$ und $b \geq 0$. Also muss $z \cdot \mathrm{i}$ wegen $-b \leq 0$ und $a \leq 0$ im dritten Quadranten liegen.
>
> In gleicher Weise kann festgestellt werden:
>
> - Wenn $z$ im dritten Quadranten liegt, muss $z \cdot \mathrm{i}$ im vierten Quadranten liegen.
> - Wenn $z$ im vierten Quadranten liegt, muss $z \cdot \mathrm{i}$ im ersten Quadranten liegen.

Unter Benutzung der Polarform und trigonometrischer Umrechnungen erhalten wir außerdem:

$$\begin{aligned} z \cdot \mathrm{i} &= r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)\cdot \mathrm{i} \\ &= r\,(-\sin\varphi + \mathrm{i}\,\cos\varphi) \\ &= r\,\left(\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\frac{\pi}{2}\pm\varphi)\right) \end{aligned}$$

Angenommen, das letzte Minus-Zeichen wäre zulässig, dann würde wegen

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi) \;=\; \cos\varphi$$

der „neue“ Punkt im selben Quadranten liegen wie der ursprüngliche. Das kann wegen der obigen Überlegung nicht gelten; also kann das Minus-Zeichen bei ± nicht zugelassen werden.

## Die Grundrechenarten

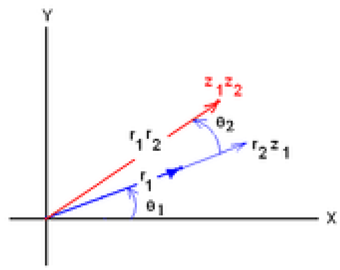
Über **Addition und Subtraktion** machen wir uns keine weiteren Gedanken. Dafür ist die algebraische Schreibweise am praktischsten; notfalls erhalten wir ein Ergebnis durch einfache Umrechnungen.

Für die **Multiplikation** erhalten wir unter Benutzung trigonometrischer Formeln die folgende Feststellung:

**Definition** (Multiplikation)

Zwei komplexe Zahlen in Polarform werden **multipliziert,** indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot \mathrm{cis}(\varphi_1+\varphi_2) \end{aligned}$$




Diese Festlegung entspricht widerspruchsfrei den algebraischen Regeln, wie hier zu sehen ist:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot \left(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \mathrm{i}^2\cdot\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2\right) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \mathrm{i}\cdot(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

Das liefert gleichzeitig eine geometrische Interpretation der Multiplikation, nämlich als Drehstreckung, wie in der vorstehenden Grafik dargestellt: Zunächst wird der Vektor $z_1$ der Länge $r_1$ um den Faktor $r_2$ gestreckt. Der resultierende Vektor $r_2 z_1$ hat die Länge $r_1 r_2$ und den unveränderten Winkel $\varphi_1$. Drehen wir jetzt diesen Vektor um den Winkel $\varphi_2$, so erhalten wir durch die Drehstreckung den Vektor $z_1 z_2$ mit der Länge $r_1 r_2$ und dem Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$.

Die **Division** können wir einfacher herleiten. Gesucht ist eine Zahl *z* mit folgender Bedingung:

$$z \;=\; \frac{z_1}{z_2} \quad\Leftrightarrow\quad z\cdot z_2 \;=\; z_1$$

Das ist gleichbedeutend damit, dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} r\cdot r_2 &= r_1 & \Rightarrow & r &= \frac{r_1}{r_2} \\ \varphi+\varphi_2 &= \varphi_1 & \Rightarrow & \varphi &= \varphi_1-\varphi_2 \end{array} \right.$$

Wir können also analog zur Multiplikation festlegen:

**Definition** (Division)

Zwei komplexe Zahlen in Polarform werden **dividiert,** indem man die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)\end{aligned}$$

Beachte, dass wir bei der Division komplexer Zahlen letztlich nur zwei *reelle* Zahlen dividieren, nämlich die beiden Beträge.

# Exponentialform

Der Vollständigkeit halber sei noch diese Darstellungsweise genannt:

**Definition** (Exponentialform einer komplexen Zahl)

$z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ wird als **Exponentialform** bezeichnet.

Dabei ist $r$ der Betrag, $\mathrm{e}$ die Exponentialfunktion[3] und $\varphi$ das Argument von $z$.

Die Herleitung dieser Form erfolgt im Kapitel Anwendung in der Mathematik mit Hilfe der Eulerschen Formel.

# Aufgaben

## Übungen

| Übung 1 | Algebraische Form in Polarform umwandeln | Zur Lösung |
|---|---|---|

Bestimme die Polarform der folgenden Zahlen:

1. $z = -5 + 5\,\mathrm{i}$
2. $z = 0 - 3\,\mathrm{i}$

Benutze sowohl (Arkus-)Kosinus als auch (Arkus-)Tangens.

| Übung 2 | Polarform in algebraische Form umwandeln | Zur Lösung |
|---|---|---|

Bestimme die algebraische Form zur komplexen Zahl mit $r = \sqrt{12}$ und $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

| Übung 3 | Drehung | Zur Lösung |
|---|---|---|

Gib jeweils eine geometrische Interpretation an für die Multiplikation einer komplexen Zahl *z* mit:

$\mathrm{i}^2 \quad \mathrm{i}^3 \quad \mathrm{i}^4 \quad 2\,\mathrm{i} \quad -\mathrm{i}$

| Übung 4 | Multiplikation | Zur Lösung |
| --- | --- | --- |

Gegeben sind die folgenden Zahlen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 \cdot \text{cis}\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ z_2 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right) \\ z_3 &= 1 \cdot \text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right) \\ z_4 &= \frac{1}{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{5}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

Berechne die folgenden Produkte:

$$z_1 \cdot z_2 \qquad z_1 \cdot z_3 \qquad z_2 \cdot z_4 \qquad z_3 \cdot z_4$$

Wandle das Ergebnis zusätzlich in die algebraische Form um und gib die Lage in der Gauß'schen Zahlenebene an.

| Übung 5 | Division | Zur Lösung |
| --- | --- | --- |

Berechne zu den Zahlen aus Übung 4 die folgenden Divisionen:

$$\frac{z_3}{z_1} \qquad \frac{z_2}{z_3} \qquad \frac{z_2}{z_4}$$

Wandle auch hier das Ergebnis in die algebraische Form um und gib die Lage in der Gauß'schen Zahlenebene an.

## Lösungen

| Lösung zu Übung 1 | Algebraische Form in Polarform umwandeln | Zur Übung |
| --- | --- | --- |

**zu 1.** $z = 0; -5 + 5\,\text{i}$

**Betrag:** $r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

**(Arkus-)Kosinus:** $\varphi = \arccos\left(\frac{-5}{5\sqrt{2}}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

**(Arkus-)Tangens:** Weil der Realteil negativ und der Imaginärteil positiv ist, liegt der Punkt im zweiten Quadranten. Das Argument wird wie folgt errechnet:

$$\tan\varphi = \frac{5}{-5} = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

Wir erhalten also die folgende Polarform:

$$z = 5\sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$

**zu 2.** $z = 0 - 3\,\text{i}$

Der Realteil ist Null, also liegt die Zahl auf dem negativen Teil der imaginären Achse. Der Betrag ergibt sich direkt aus dem Imaginärteil, und das Argument beträgt: $\varphi = 270° = \frac{3\pi}{2}$ Der Form halber soll dies mit dem Arkuskosinus „nachgerechnet“ werden:

$$\varphi \;=\; -\arccos 0 \;=\; -\frac{\pi}{2} \;\equiv\; \frac{3\pi}{2} \mod 2\pi$$

Die Polarform lautet also:

$$z = -3\,\mathrm{i} = 3 \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

| Lösung zu Übung 2 | Polarform in algebraische Form umwandeln | Zur Übung |
|---|---|---|

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{12}\cdot\cos(\tfrac{2\pi}{3}) &&= 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) &&= -\sqrt{3} \\ b &= \sqrt{12}\cdot\sin(\tfrac{2\pi}{3}) &&= 2\cdot\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} &&= 3 \end{aligned}$$

| Lösung zu Übung 3 | Drehung | Zur Übung |
|---|---|---|

Die ersten drei Multiplikationen sind eine mehrfache Anwendung des o. g. Satzes:

- $\mathrm{i}^2$ liefert eine Drehung um $\pi$, also die Punktspiegelung am Nullpunkt.
- $\mathrm{i}^3$ liefert eine Drehung um $\frac{3\pi}{2}$.
- $\mathrm{i}^4$ liefert eine Drehung um $2\pi$, also den ursprünglichen Wert.

Die Multiplikation mit 2i entspricht der Aussage des Satzes; der Faktor 2 sorgt zusätzlich für eine entsprechende Streckung.

Die Multiplikation mit $-i$ entspricht ebenfalls dem Satz; der Faktor $-1$ sorgt für eine Drehung im (mathematisch) negativen Sinn.

| Lösung zu Übung 4 | Multiplikation | Zur Übung |
|---|---|---|

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= 3\cdot 2\cdot\mathrm{cis}\left((\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4})\pi\right) &&= 6\cdot\mathrm{cis}\left(\tfrac{17}{12}\pi\right) \\ &= 6\cdot\cos\left(\tfrac{17}{12}\pi\right)+6\,\mathrm{i}\cdot\sin\left(\tfrac{17}{12}\pi\right) &&= 6\cdot\cos 255° + 6\mathrm{i}\cdot\sin 255° \\ &\approx -6\cdot 0{,}2588 - 6\,\mathrm{i}\cdot 0{,}97 &&\approx -1{,}5529 - 5{,}7956\cdot\mathrm{i} \qquad \text{(4. Quadrant)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_3 &= 3\cdot 1\cdot\mathrm{cis}\left((\tfrac{2}{3}+\tfrac{5}{6})\pi\right) &&= 3\cdot\mathrm{cis}\left(\tfrac{9}{6}\pi\right) \\ &= 3\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)+3\,\mathrm{i}\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) &&= 3\cdot\cos 270° + 3\,\mathrm{i}\cdot\sin 270° \\ &= 3\cdot 0 - 3\cdot\mathrm{i} \qquad \text{(imaginäre Achse, negativer Abschnitt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2\cdot z_4 &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{cis}\left((\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4})\pi\right) &&= 1\cdot\mathrm{cis}\left(\tfrac{8}{4}\pi\right) \\ &= \cos(2\pi)+\mathrm{i}\cdot\sin(2\pi) = 1 + 0\cdot\mathrm{i} \qquad \text{(reelle Achse, positiver Abschnitt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 \cdot z_4 &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{cis}\Big((\tfrac{5}{6} + \tfrac{5}{4})\pi\Big) &&= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{cis}\Big(\tfrac{25}{12}\pi\Big) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\tfrac{1}{12}\pi) + \frac{1}{2}\mathrm{i} \cdot \sin(\tfrac{1}{12}\pi) &&= \frac{1}{2} \cdot \cos 15^\circ + \frac{1}{2}\mathrm{i} \cdot \sin 15^\circ \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}9659 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}2588 \cdot \mathrm{i} &&\approx 0{,}483 + 0{,}1294 \cdot \mathrm{i} \qquad \text{(1. Quadrant)} \end{aligned}$$

| Lösung zu Übung 5 | Division | Zur Übung |
|---|---|---|

$$\begin{aligned} \frac{z_3}{z_1} &= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{cis}\Big((\tfrac{5}{6} - \tfrac{2}{3})\pi\Big) &&= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{cis}\Big(\tfrac{1}{6}\pi\Big) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \cos\tfrac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\mathrm{i} \cdot \sin\tfrac{\pi}{6} &&= \frac{1}{3} \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{3}\,\mathrm{i} \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\,\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} &&= \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6} \cdot \mathrm{i} \qquad \text{(1. Quadrant)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_3} &= \frac{2}{1} \cdot \operatorname{cis}\Big((\tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{6})\pi\Big) = 2 \cdot \operatorname{cis}\Big(-\frac{1}{12}\pi\Big) = 2 \cdot \cos(-15^\circ) + 2\mathrm{i} \cdot \sin(-15^\circ) \\ &\approx 2 \cdot 0{,}9659 + 2\,\mathrm{i} \cdot (-0{,}2588) \approx 1{,}9319 - 0{,}5176 \cdot \mathrm{i} \qquad \text{(4. Quadrant)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_4} &= \frac{2}{0{,}5} \cdot \operatorname{cis}\Big((\tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{4})\pi\Big) = 4 \cdot \operatorname{cis}\big(-\tfrac{\pi}{2}\big) = 4 \cdot \cos(\tfrac{3}{2}\pi) + 4\,\mathrm{i} \cdot \sin(\tfrac{3}{2}\pi) \\ &= 4 \cdot 0 + 4 \cdot \mathrm{i} \cdot (-1) = -4 \cdot \mathrm{i} \qquad \text{(imaginäre Achse, negativer Abschnitt)} \end{aligned}$$

# Hinweise

## Anmerkungen

1. Benannt nach Carl Friedrich Gauß (1777–1855). – *Zusatzbemerkung zur Schreibweise: Nach den geltenden Rechtschreibregeln (§ 62) gibt es zwei Schreibweisen: Gauß'sche Zahlenebene (Eigenname groß mit Apostroph) oder gaußsche Zahlenebene (Eigenname klein ohne Apostroph). In der Mathematik ist auch die Schreibweise „Gaußsche Zahlenebene" (Eigenname groß ohne Apostroph) üblich.*
2. Bei den Berechnungen wird mehrfach folgende Formel verwendet:
$\arccos x = \pi - \arccos(-x)$
3. Ähnlich wie bei *i* gibt es auch für *e* sowohl die kursive als auch die normale Schreibweise. In diesem Buch wird es wie jede Funktion normal geschrieben.

## Siehe auch

Übersichtsartikel bei Wikipedia:

- Gauß'sche Zahlenebene
- Polarkoordinaten
- Zahlengerade
- Arkussinus und Arkuskosinus sowie Arkustangens und Arkuskotangens